УДК 378

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ПОВЕДЕНИЕ УЧАЩЕГОСЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

Романов В.П., Соколова Н.А.

Московский институт электронной техники, Москва, e-mail: romanov.valeri@gmail.com

Для описания поведения индивидуума в процессе обучения использован вероятностно-статистический метод, в соответствии с которым учащийся идентифицируется функцией распределения, определяющей плотность вероятности нахождения его информационном пространстве координат и скоростей. На основе решения методом Фурье уравнения непрерывности, характеризующего связь изменения плотности вероятности за единицу времени с дивергенцией потока плотности вероятности, найдена функция распределения, представляющая собой суперпозицию волн, распространяющихся в информационном пространстве координат и скоростей.

Ключевые слова: учащийся, вероятностно-статистический метод, информационное пространство, функция распределения, плотность вероятности, уравнение непрерывности

ANALYTICAL SOLUTION OF CONTINUITY EQUATION, DESCRIBING STUDENT BEHAVIOR IN THE PROCESS OF LEARNING

Romanov V.P., Sokolova N.A.

Moscow institute of electronic technology, Moscow, e-mail: romanov.valeri@gmail.com

Probabilistic-statistical method is used to describe student behavior in the process of learning. According to this method student is identified with distribution function, which defines density of probability to find him in information space of coordinates and velocities. Distribution function, which corresponds superposition of waves, spreading in information space of coordinates and velocities, was found on base of solution by Fourier's method of continuity equation, characterizing relation between probability density change in a time unit and probability density flow divergence.

Keywords: student, probabilistic-statistical method, information space, distribution function, probability density, continuity equation

В [1] предложена и в [2] развита вероятностно-статистическая модель учащегося, в соответствии с которой индивидуум в процессе обучения движется информационном пространстве. Однако в связи с тем, что человеческому знанию присущи элементы неопределённости и случайности, указать точное положение учащегося в информационном пространстве не представляется возможным. Можно говорить лишь о вероятности нахождения его в той или иной области информационного пространства. В данной модели каждый индивидуум идентифицируется функцией распределения (плотности вероятности) – вероятностью найти его в единичном объёме информационного пространства. В процессе обучения функция распределения, с которой идентифицируется учащийся, эволюционируя, движется в информационном пространстве. Каждый студент обладает индивидуальными свойствами и допускается независимая локализация (пространственная и кинематическая) индивидуумов друг относительно друга.

На основе закона сохранения вероятности записана система дифференциальных уравнений, представляющих собой уравнения непрерывности, которые связывают изменение плотности вероятности за единицу времени в фазовом пространстве (пространстве координат и кинематических величин различных порядков) с дивергенцией потока плотности вероятности в рассматриваемом фазовом пространстве. В [2] найдено аналитическое решение уравнения непрерывности для случая, когда функция распределения, соответствующая любому произвольно взятому индивидууму, зависит только от координат и времени. Данная работа посвящена нахождению аналитического решения (функции распределения) уравнения непрерывности, описывающего поведение учащегося в пространстве координат и скоростей.

Общее решение уравнения непрерывности

В соответствии с [2] уравнение непрерывности в пространстве координат и скоростей имеет вид

$$\frac{\partial\Psi(\sigma_i,\dot{\sigma}_i;t)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{N}\{div_{\sigma_k}[\dot{\sigma}_k\Psi(\sigma_i,\dot{\sigma}_i;t)]+div_{\dot{\sigma}_k}[<\ddot{\sigma}_k>\Psi(\sigma_i,\dot{\sigma}_i;t)]\}=0;$$

$$<\ddot{\sigma}_k> = \frac{\int\limits_{(\infty)} \ddot{\sigma}_k \Psi(\sigma_i, \dot{\sigma}_i, \ddot{\sigma}_i; t) \prod\limits_{j=1}^{N} d\ddot{\sigma}_j}{\int\limits_{(\infty)} \Psi(\sigma_i, \dot{\sigma}_i, \ddot{\sigma}_i; t) \prod\limits_{j=1}^{N} d\ddot{\sigma}_j}, \quad (1)$$

где $\Psi(\sigma_i, \dot{\sigma}_i; t)$ – функция распределения индивидуумов в пространстве координат, скоростей и времени; $\Psi(\sigma_i, \dot{\sigma}_i, \ddot{\sigma}_i; t)$ – функция распределения индивидуумов в пространстве координат, скоростей, ускорений и времени; $\sigma_i \equiv \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, ..., \sigma_N$ – координаты индивидуумов в информационном пространстве; $\dot{\sigma}_i \equiv \dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2, \dot{\sigma}_3, ..., \dot{\sigma}_N$ – скорости индивидуумов; $\ddot{\sigma}_i \equiv \ddot{\sigma}_1, \ddot{\sigma}_2, \ddot{\sigma}_3, ..., \ddot{\sigma}_N$ – ускорения индивидуумов; $<\ddot{\sigma}_k>$ – среднее ускорение k-го индивидуума; N – общее число индивидуумов; t – время.

Решение уравнения (1) будем искать в приближении аддитивности функций распределения отдельных индивидуумов:

$$\Psi(\sigma_i, \dot{\sigma}_i; t) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \Psi_k(\sigma_k, \dot{\sigma}_k; t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \Psi_j(\sigma_j, \dot{\sigma}_j; t). \quad (2)$$

Тогда, подставляя (2) в (1), после несложных преобразований получим

$$\frac{\partial \Psi_k(\sigma_k, \dot{\sigma}_k; t)}{\partial t} = +\frac{\partial \dot{\sigma}_k}{\partial \sigma_k}\sum_{j=1}^{N} \Psi_j(\sigma_j, \dot{\sigma}_j; t) + \dot{\sigma}_k \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \Psi_j(\sigma_j, \dot{\sigma}_j; t)}{\partial \sigma_k} +$$
$$+\frac{\partial <\ddot{\sigma}_k>}{\partial \dot{\sigma}_k}\sum_{j=1}^{N} \Psi_j(\sigma_j, \dot{\sigma}_j; t) + <\ddot{\sigma}_k> \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \Psi_j(\sigma_j, \dot{\sigma}_j; t)}{\partial \dot{\sigma}_k} = 0. \quad (3)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_k}{\partial \sigma_k} = 0, \quad \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \Psi_j(\sigma_j, \dot{\sigma}_j; t)}{\partial \sigma_k} = \frac{\partial \Psi_k(\sigma_k, \dot{\sigma}_k; t)}{\partial \sigma_k},$$
$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \Psi_j(\sigma_j, \dot{\sigma}_j; t)}{\partial \dot{\sigma}_k} = \frac{\partial \Psi_k(\sigma_k, \dot{\sigma}_k; t)}{\partial \dot{\sigma}_k},$$

и полагая $<\ddot{\sigma}_k> = \mathrm{const}$ и, следовательно, $\frac{\partial <\ddot{\sigma}_k>}{\partial \dot{\sigma}_k} = 0$, а также, введя переобозначения $\sigma = \sigma_k$, $\dot{\sigma} = \sigma_k$, $<\ddot{\sigma}> = <\ddot{\sigma}_k>$, $\Psi(\sigma, \dot{\sigma}; t) = \Psi_k(\sigma_k, \dot{\sigma}_k; t)$, преобразуем (3) к виду

$$\frac{\partial \Psi(\sigma, \dot{\sigma}; t)}{\partial t} + \dot{\sigma}\frac{\partial \Psi(\sigma, \dot{\sigma}; t)}{\partial \sigma} + <\ddot{\sigma}> \frac{\partial \Psi(\sigma, \dot{\sigma}; t)}{\partial \dot{\sigma}} = 0. \quad (4)$$

Решение уравнения (4) найдём, используя метод Фурье. С этой целью $\Psi(\sigma_i, \dot{\sigma}_i; t)$ будем искать в виде произведения трёх функций, каждая из которых зависит только от одной переменной, а именно,

$$\Psi(\sigma, \dot{\sigma}; t) = Z(\sigma)V(\dot{\sigma})T(t). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), будем иметь

$$\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t} = -\frac{\dot{\sigma}}{Z(\sigma)}\frac{\partial Z(\sigma)}{\partial \sigma} - \frac{<\ddot{\sigma}>}{V(\dot{\sigma})}\frac{\partial V(\dot{\sigma})}{\partial \dot{\sigma}}. \quad (6)$$

Левая часть уравнения (6) зависит только от времени, а правая – от координаты и скорости индивидуума в информационном пространстве. Такая ситуация реализуется в том случае, если левая и правая части этого уравнения равны одной и той же постоянной величине, например, β. Тогда (6) распадается на два уравнения:

$$\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t} = \beta$$

и

$$\frac{\dot{\sigma}}{Z(\sigma)}\frac{\partial Z(\sigma)}{\partial \sigma} + \frac{<\ddot{\sigma}>}{V(\dot{\sigma})}\frac{\partial V(\dot{\sigma})}{\partial \dot{\sigma}} = -\beta. \quad (7)$$

Решая первое уравнение из (7), получим

$$T(t) = A\exp(\beta t), \quad (8)$$

где A – постоянная интегрирования.

Второе уравнение из (7) допускает разделение переменных:

$$\frac{1}{Z(\sigma)}\frac{\partial Z(\sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{<\ddot{\sigma}>}{\dot{\sigma}V(\dot{\sigma})}\frac{\partial V(\dot{\sigma})}{\partial \dot{\sigma}} - \frac{\beta}{\dot{\sigma}}. \quad (9)$$

Левая часть уравнения (9) зависит только от координаты, а правая – только от скорости. В этом случае левая и правая части этого уравнения должны быть равны одной и той же постоянной величине, обозначим которую греческой буквой γ. Следовательно, вместо (9) можно записать два уравнения:

$$\frac{1}{Z(\sigma)}\frac{\partial Z(\sigma)}{\partial\sigma}=\gamma$$

и

$$\frac{<\ddot{\sigma}>}{\dot{\sigma}V(\dot{\sigma})}\frac{\partial V(\dot{\sigma})}{\partial\dot{\sigma}}+\frac{\beta}{\dot{\sigma}}=-\gamma. \qquad (10)$$

Легко убедиться, что решением первого уравнения из (10) является следующее выражение:

$$Z(\sigma)=B\exp(\gamma\sigma), \qquad (11)$$

где B – постоянная интегрирования.

Проведя разделение переменных во втором уравнении из (10), будем иметь

$$\frac{1}{V(\dot{\sigma})}\frac{\partial V(\dot{\sigma})}{\partial\dot{\sigma}}=-\frac{\gamma\dot{\sigma}}{<\ddot{\sigma}>}-\frac{\beta}{<\ddot{\sigma}>}.$$

Решением данного уравнения является функция

$$V(\dot{\sigma})=C\exp\left[-\left(\frac{\gamma}{2<\ddot{\sigma}>}\dot{\sigma}^2+\frac{\beta}{<\ddot{\sigma}>}\dot{\sigma}\right)\right], \qquad (12)$$

где C – постоянная интегрирования.

Подставляя (8), (11) и (12) в (5), получим общее выражение для плотности вероятности в следующем виде:

$$\Psi(\sigma,\dot{\sigma};t)=D\exp\left[\beta\left(t-\frac{\dot{\sigma}}{<\ddot{\sigma}>}\right)+\gamma\left(\sigma-\frac{\dot{\sigma}^2}{2<\ddot{\sigma}>}\right)\right], \qquad (13)$$

где $D = ABC$ – постоянная интегрирования.

Выполнение условия нормировки

$$\iint\limits_{(\infty)}\Psi(\sigma,\dot{\sigma};t)\,d\sigma\,d\dot{\sigma}=1$$

возможно лишь в случае, когда постоянные являются чисто мнимыми величинами, а именно, $\beta=\pm i\omega$ и $\gamma=\pm ik$, где ω и k – частота и волновое число соответственно. Подставляя β и γ в (13), получим

$$\begin{aligned}\Psi_{\omega,k}(\sigma,\dot{\sigma};t)&=D_1(\omega,k)\exp\left\{i\left[\omega\left(t-\frac{\dot{\sigma}}{<\ddot{\sigma}>}\right)+k\left(\sigma-\frac{\dot{\sigma}^2}{2<\ddot{\sigma}>}\right)\right]\right\}+\\&+D_2(\omega,k)\exp\left\{-i\left[\omega\left(t-\frac{\dot{\sigma}}{<\ddot{\sigma}>}\right)+k\left(\sigma-\frac{\dot{\sigma}^2}{2<\ddot{\sigma}>}\right)\right]\right\}+\\&+D_3(\omega,k)\exp\left\{i\left[\omega\left(t-\frac{\dot{\sigma}}{<\ddot{\sigma}>}\right)-k\left(\sigma-\frac{\dot{\sigma}^2}{2<\ddot{\sigma}>}\right)\right]\right\}+\\&+D_4(\omega,k)\exp\left\{-i\left[\omega\left(t-\frac{\dot{\sigma}}{<\ddot{\sigma}>}\right)-k\left(\sigma-\frac{\dot{\sigma}^2}{2<\ddot{\sigma}>}\right)\right]\right\},\end{aligned} \qquad (14)$$

где $D_1(\omega, k)$, $D_2(\omega, k)$, $D_3(\omega, k)$ и $D_4(\omega, k)$ – постоянные интегрирования, соответствующие конкретным значениям ω и k.

Используя формулы Эйлера, перейдём в (14) от экспоненциальных функций к тригонометрическим функциям:

$$\begin{aligned}\Psi_{\omega,k}(\sigma,\dot{\sigma};t)&=C_1^*(\omega,k)\cos\left[\omega\left(t-\frac{\dot{\sigma}}{<\ddot{\sigma}>}\right)+k\left(\sigma-\frac{\dot{\sigma}^2}{2<\ddot{\sigma}>}\right)+\alpha_1(\omega,k)\right]+\\&+C_2^*(\omega,k)\cos\left[\omega\left(t-\frac{\dot{\sigma}}{<\ddot{\sigma}>}\right)-k\left(\sigma-\frac{\dot{\sigma}^2}{2<\ddot{\sigma}>}\right)+\alpha_2(\omega,k)\right],\end{aligned} \qquad (15)$$

где $C_1^*(\omega,k)$ и $C_2^*(\omega,k)$ – постоянные интегрирования; $\alpha_1(\omega, k)$ и $\alpha_2(\omega, k)$ – начальные фазы, соответствующие конкретным значениям ω и k.

Решение (15) представляет собой суперпозицию двумерных волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях координат и скоростей. Общее решение уравнения (4) представляет собой суперпозицию решений (15):

$$\Psi(\sigma,\dot{\sigma};t)=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty C_1(\omega,k)\cos\left[\omega\left(t-\frac{\dot{\sigma}}{<\ddot{\sigma}>}\right)+k\left(\sigma-\frac{\dot{\sigma}^2}{2<\ddot{\sigma}>}\right)+\alpha_1(\omega,k)\right]d\omega dk+$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty C_2(\omega,k)\cos\left[\omega\left(t-\frac{\dot{\sigma}}{<\ddot{\sigma}>}\right)-k\left(\sigma-\frac{\dot{\sigma}^2}{2<\ddot{\sigma}>}\right)+\alpha_2(\omega,k)\right]d\omega dk, \quad (16)$$

где $C_1(\omega, k)$ и $C_2(\omega, k)$ – постоянные интегрирования, нормированные на единичные интервалы частот и волновых чисел.

Уравнение (16) позволяет по известному начальному распределению плотности вероятности и условию нормировки найти вид функции для любого момента времени.

Выводы

1. Показано, что для описания поведения индивидуума в процессе обучения может быть использован вероятностно-статистический метод, в соответствии с которым учащийся идентифицируется функцией распределения (плотностью вероятности), представляющей собой вероятность нахождения учащегося в единичной области информационного пространства координат и скоростей.

2. Применение метода Фурье для решения уравнения непрерывности, связывающего изменение плотности вероятности за единицу времени с дивергенцией потока плотности вероятности, позволило получить в аналитическом виде функцию распределения, определяемую суперпозицией двумерных волн, распространяющихся информационном пространстве координат и скоростей.

Список литературы

1. Романов В.П., Гордиевич Л.А., Золочевский Ю.Б. Альтернативная структура системы непрерывной подготовки высшими учебными заведениями специалистов высокой квалификации // Деп. в НИИВШ, 01.09.88, № 1389 – 88 деп.

2. Романов В.П., Соколова Н.А. Вероятностно-статистическая модель учащегося // Современные проблемы науки и образования. – 2009/ – № 6 (Часть 3.). – С. 122–129.