мерение в ее изучении, позволяя существенно обогатить эволюционную концепцию и теорию универсалий.

В противном случае управляющее воздействие может разрушить целый комплекс системосохраняющих факторов, без чего дальнейшее эволюционное развитие правовой системы просто немыслимо. Только при оптимальном соотношении организации и самоорганизации правовой системы можно достичь ее естественноисторического развития в переходный период.

«Математическое моделирование социально-экономических процессов», ОАЭ (Дубай), 16-23 октября 2011 г.

Физико-математические науки

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДГОТОВКИ И ДИНАМИКИ НАУЧНЫХ КАДРОВ

Билаль Н.Е. Сулейман

Белгородский государственный университет, Белгород, e-mail: bilalhamadneh@yahoo.com

В настоящее время математическому моделированию научно-образовательных процессов уделяется большое внимание. Из наиболее фундаментальных исследований отметим работы [1-3]. В них вышеуказанные процессы моделируются системами разностных и обыкновенных дифференциальных уравнений.

Перспективным также является использование уравнений популяционной динамики [4-6] для моделирования научно-образовательных процессов [7].

При построении математической модели подготовки и динамики научных кадров удобно исходить из балансовых феноменологических уравнений и поступать таким образом, как это делается при построении уравнений популяционной динамики.

В работе [8] была предложена модель подготовки и динамики научных кадров в терминах уравнений популяционной динамики

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha_1 x - \beta_1 xy - \gamma_1 xz - \varepsilon_1 x^2; \\ \dfrac{dy}{dt} = -\alpha_2 y - \gamma_2 y + \beta_1 xy + \gamma_1 xz - \beta_2 yz - \varepsilon_2 y^2; \\ \dfrac{dz}{dt} = -\alpha_3 z + \beta_2 yz + \gamma_2 y - \varepsilon_3 z^2, \end{cases} \quad (1)$$

где x – численность научных работников без научной степени; y – численность кандидатов наук; z – численность докторов наук.

Эта модель описывает процессы воспроизводства научных кадров, их безвозвратного выбытия, а также переходы из одной категории в другую. В ней $\alpha_1 x$ – воспроизводство научных кадров без учёной степени (разность между их подготовкой и выбытием не связанная с переходом в категорию кандидатов наук в единицу времени), $\beta_1 xy$ – интенсивность подготовки кандидатов наук из числа неостепененных научных кадров (x) кандидатами наук (y), $\gamma_1 xz$ – интенсивность подготовки кандидатов наук из числа неостепененных научных кадров (x) докторами наук (z), $\alpha_2 y$ – интенсивность выбытия кандидатов наук из научных кадров не связанная с переходом в категорию докторов наук (выбытие за счёт смертности, интеллектуальной миграции, перехода в другую сферу деятельности), $\gamma_2 y$ – интенсивность самоподготовки кандидатов наук до уровня докторов наук, $\beta_2 yz$ – интенсивность подготовки докторов наук из числа кандидатов наук (y) докторами наук (z), $\alpha_3 z$ – интенсивность выбытия докторов наук из научных кадров; $\varepsilon_1 x^2$, $\varepsilon_2 y^2$, $\varepsilon_3 z^2$ – члены, описывающие внутригрупповую конкуренцию в своих категориях (стандартные члены уравнений популяционной динамики, отвечающие за самоограничение роста).

В модели (1) предлагалось, что кандидаты наук готовятся только при научном руководстве со стороны кандидатов (член – $\beta_1 xy$) и докторов (член – $\gamma_1 xz$) наук, а доктора наук готовятся самостоятельно (член – $\gamma_2 y$) или при участии научного консультанта – доктора наук (член – $\beta_2 yz$).

В работе [8] для простоты анализа рассмотрен случай, когда $\gamma_2 = 0$ (соответствует современной практики, когда докторов наук готовят исключительно с участием научных консультантов, являющихся докторами наук) и $\varepsilon_i = 0$ (отсутствие внутригрупповой конкуренции). В ней были получены особые точки динамической системы (1):

1. $x^* = y^* = z^* = 0$;

2. $x^* = \dfrac{\alpha_2}{\beta_1}$, $y^* = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$, $z^* = 0$;

3. $x^* = \dfrac{\alpha_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_2\gamma_1)}{\alpha_1\beta_2\gamma_1}$, $y^* = \dfrac{\alpha_3}{\beta_2}$,

$z^* = \dfrac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1}{\beta_2\gamma_1}$.

и проделан линейный анализ устойчивости первых двух особых точек. Показано, что первая особая точка имела неустойчивый вид (седло), а вторая при $\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1 > 0$ – являлась неустойчивым фокусом, при $\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1 < 0$ – устойчивым фокусом, при $\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1 = 0$ – центром (здесь не возникает бифуркации рождения цикла, так как $\det A = 0$, A – матрица Якоби линеаризованной системы (1)).

Для третьей особой точки в работе [8] были выписаны матрица A и характеристическое уравнение $|A - \lambda I| = 0$:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{M\beta_1}{\gamma_1} & M \\ \alpha_1 & N & \dfrac{\alpha_3(\alpha_2\gamma_1-\alpha_3\beta_1)}{\alpha_1\beta_2} \\ 0 & \dfrac{\alpha_1\beta_2-\alpha_3\beta_1}{\gamma_1} & 0 \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$|A-\lambda I|=\frac{(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_2)}{\gamma_1}\left[\frac{(\alpha_3\beta_1-\alpha_2\gamma_1)\alpha_3}{\alpha_1\beta_2}\lambda-\alpha_1 M\right]-\lambda\left[(\lambda-N)\lambda-\frac{\alpha_1\beta_1 M}{\gamma_1}\right]=0; \quad (3)$$

где $M=\dfrac{-\alpha_3(\alpha_1\beta_2-\alpha_3\beta_1+\alpha_2\gamma_1)}{\alpha_1\beta_2}$, $N=\dfrac{\alpha_3\beta_1(2\alpha_1\beta_2+\alpha_2\gamma_1)-\alpha_3^2\beta_1^2-\alpha_1^2\beta_2^2}{\alpha_1\beta_2\gamma_1}-\alpha_2$.

В этой же работе также показано, что

$$\det A=\frac{(\alpha_1\beta_2-\alpha_3\beta_1)\alpha_1 M}{\gamma_1}<0,$$

так как $\alpha_1\beta_2-\alpha_3\beta_1>0 <=> z^*>0$ и $M<0$.

В нашем исследовании мы проделаем анализ устойчивости третьей (нетривиальной) особой точки рассматриваемой динамической системы с помощью критериев Рауса-Гурвица. Для этого упростим характеристическое уравнение (3) и выражение для N:

$$\lambda^3-N\lambda^2-\left[\frac{\alpha_1\beta_1 M}{\gamma_1}+\frac{(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_2)(\alpha_3\beta_1-\alpha_2\gamma_1)\alpha_3}{\alpha_1\beta_2\gamma_1}\right]\lambda+\frac{(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_2)\alpha_1 M}{\gamma_1}=0, \quad (4)$$

$$N=\frac{(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_2)(\alpha_2\gamma_1-\alpha_3\beta_1+\alpha_1\beta_2)}{\alpha_1\beta_2\gamma_1}. \quad (5)$$

Коэффициенты кубического уравнения (4) приведём к обозначениям, используемых при выписывании критериев Рауса-Гурвица:

$$a_0=1,\quad a_1=-N,$$

$$a_2=-\frac{\alpha_1\beta_1 M}{\gamma_1}-\frac{(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_2)(\alpha_3\beta_1-\alpha_2\gamma_1)\alpha_3}{\alpha_1\beta_2\gamma_1},$$

$$a_3=\frac{(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_2)\alpha_1 M}{\gamma_1}.$$

Сами критерии имеют вид:

$$\begin{cases} a_1 a_3>0 <=> \dfrac{(-N)(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_2)\alpha_1 M}{\gamma_1}>0, \\ a_2 a_3>0 <=> \left[-\dfrac{\alpha_1\beta_1 M}{\gamma_1}-\dfrac{(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_2)(\alpha_3\beta_1-\alpha_2\gamma_1)\alpha_3}{\alpha_1\beta_2\gamma_1}\right]\dfrac{(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_2)\alpha_1 M}{\gamma_1}= \\ =\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1\beta_2\gamma_1}\left[\alpha_1\beta_1(\alpha_1\beta_2-\alpha_3\beta_1)+\alpha_1\alpha_2\beta_1\gamma_1+(\alpha_1\beta_2-\alpha_3\beta_1)(\alpha_3\beta_1-\alpha_2\gamma_1)\right]>0, \\ a_1a_2-a_0 a_3>0 <=> \dfrac{M}{\gamma_1^2\beta_2}(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_2)\left[\gamma_1(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)+\beta_1(\alpha_1\beta_2-\alpha_3\beta_1)\right]>0. \end{cases} \quad (6)$$

Из выражения для N (5) при базовом условии $z^*>0 <=> \alpha_1\beta_2-\alpha_3\beta_1>0$ следует, что $N<0$. Таким образом, первый критерий всегда выполняется.

Из критериев Рауса-Гурвица следует, что устойчивость нетривиальной особой точки нашей модели будет иметь место при следующей системе ограничений на её параметры

$$\begin{cases} \alpha_1\beta_2-\alpha_3\beta_1>0, \\ \alpha_1\beta_1(\alpha_1\beta_2-\alpha_3\beta_1)+\alpha_1\alpha_2\beta_1\gamma_1+(\alpha_1\beta_2-\alpha_3\beta_1)(\alpha_3\beta_1-\alpha_2\gamma_1)>0, \\ \gamma_1(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)+\beta_1(\alpha_1\beta_2-\alpha_3\beta_1)>0 \end{cases} \quad (7)$$

Численные эксперименты, проведённые нами с моделью (1), на основе специальной программы, созданной с использованием SciPy (Scientific Python), показали на соблюдение полученных нами конкретных критериев Рауса – Гурвица .

Параметры модели подобраны таким образом, чтобы выполнялось неравенство $x^*>y^*>z^*$, то есть количество неостепенённых научных сотрудников превосходит количество кандидатов наук, а количество последних превосходит количество докторов наук.

Отметим, что очень большое количество параметров в модели (1) затрудняет содержательный анализ, приближенный к реальной сфере подготовки научных кадров. Здесь необходимы специальные эмпирические исследования по оценке параметров моделей и соотношений стационарных уровней разных категорий научных кадров.

Список литературы

1. Математическое моделирование системы образования / Г.Г. Малинецкий, С.А. Кащенко, А.Б. Потапов, Т.С. Ахромеева и др. // Синергетика и методы науки. – СПб.: СпбГУ, 1998. – С. 311-355.
2. Серков Л.А. Синергетические аспекты моделирования социально-экономических процессов. – Екатеринбург: ИЭУрО РАН; Изд-во АМБ, 2008. – 216 с.
3. Высшая школа с позиций нелинейной динамики / М.Н. Стриханов, Д.И. Трубецков и др. – М.: Физматлит, 2007. – 192 с.
4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 286 с.
5. Lotka A.J. Elements of Physical Biology. – Baltimore: Williams and Wilkins, 1925.
6. May R.M. Model Ecosystems. – Princeton: U.P. – 1973.
7. Московкин В.М., Билаль Н.Е.Сулейман, Кондратенко Н.Д. Математическое моделирование инновационных и научно-образовательных систем уравнениями популяционной динамики // Исследовано в России. – 2010. – Т. 13. – С. 724-761.
8. Московкин В.М. Математическое моделирование динамики научных кадров // Бизнес Информ. – Харьков, 2000. – № 6. – С. 9–10.

О ФУНКЦИЯХ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Клейменов В.Ф., Суровцева Н.Н.

Иркутский государственный университет;
Иркутский государственный технический университет, Иркутск,
e-mail: www.narod.govirk.ru

В работе авторов [1] было введено понятие динамической иерархической системы для категории пожилых людей, то есть такой системы, страты которой изменяются с течением времени t. Для таких систем возможно изучение функций определенных на стратах системы. В работе [1] был приведен пример такой функции. В данной работе получен набор функций, позволяющих не только интерполировать, но и прогнозировать значение параметров страт.

Социальная страта пожилых людей гетерогенна, среди них есть здоровые и больные; проживающие в семьях и одинокие; довольные жизнью после ухода на пенсию и ощущающие себя изолированными от общества; малоактивные и оптимистически настроенные и т.д. Для того чтобы успешно работать с пожилыми людьми, социальному работнику нужно располагать как можно более полной информацией о человеке, знать социально-экономическое положение, особенности характера, материальные и духовные потребности, состояние здоровья, быть осведомленным о социальном окружении и образе жизни пожилого человека. Поэтому прежде чем искать пути улучшения жизни пожилых людей необходимо детально изучить медико-социально-писхологические и экономические особенности выбранной категории населения.

Дадим определение динамической иерархической системы, введенное в работе [1].

Определение. Пусть задана иерархическая система I и A – некоторая страта этой системы и определена функция f: $I\times T \rightarrow S$, где T – множество вещественных чисел, S – некоторое множество (числовое, символьное, векторное и т.д.), $I\times T$ – декартово произведение множеств I и T. Тогда пара $< I, f >$ называется динамической иерархической системой.

Далее нам понадобятся следующие две таблицы, показывающие изменение численности страты «Труженики тыла».

Год	2005	2006	2007	2008
Численность страты труженик тыла c_i	2951	2910	2864	2840

Вторая таблица показывает относительную убыль $\Delta_i = c_i - 2800$.

Год	2005	2006	2007	2008
Относительная убыль Δ_i	151	110	64	40

В работе [1] был построен многочлен:

$$f(t) = 2951\cdot\frac{(t-6)(t-7)(t-8)}{(5-6)(5-7)(5-8)} + 2910\cdot\frac{(t-5)(t-7)(t-8)}{(6-5)(6-7)(6-8)} + 2864\cdot\frac{(t-5)(t-6)(t-8)}{(7-5)(7-6)(7-8)} +$$

$$+2840\cdot\frac{(t-5)(t-7)(t-7)}{(8-5)(8-7)(8-7)} = \frac{9}{2}t^3 - \frac{167}{2}t^2 + 468t - 664.$$

Это многочлен позволяет хорошо интерполировать значения изменений количества страты от 2005 до 2008 года. В тоже время значение $f(9) = 65$, а $\Delta_i(9) = 9$.

Построим следующий набор многочленов f_1, f_2, f_3, каждый из которых определим по двум последующим точкам из второй таблицы

$$f_1(t) = -41t + 356; \quad f_2(t) = -46t + 386;$$
$$f_3(t) = -24t + 232.$$

Найдем значение полученных многочленов при значении переменной $t = 9$: $f_1(9) = -13$, $f_2(9) = 16$, $f_3(9) = -28$. Таким образом, лучшим многочленом для прогнозирования изменения численности страты оказывается многочлен $f_2(t)$.