УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ ОБОЛОЧЕК ТЕТРАСТРУКТУРЫ С УЧЕТОМ ДИСКРЕТНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ

¹Немеребаев М.Н., ²Бекмуратов М.М., ¹Актаев Е.К.¹Таразский инновационно-гуманитарный университет, Тараз,
e-mail: nemerebayev@mail.ru;²Таразский государственный университет имени М.Х. Дулати, Тараз

Выведена система уравнений, описывающих определение собственных частот колебаний цилиндрических сетчатых оболочек с использованием функции динамической податливости, являющейся математическим аналогом функции Грина. Рассмотрены особенности геометрии сетчатых оболочек из композитных материалов. При малых значениях углов можно приближенно считать, что они лежат на поверхности, близкой к цилиндрической. Такой подход позволяет сформулировать единую систему допущений, на основе которых проводится оценка малости тех или иных членов в соотношениях между деформациями и перемещениями стержней. Определено число стержней в каркасе, точки соединения их друг с другом и с опорным шпангоутом. Описаны уравнения вынужденных колебаний стержня постоянного сечения под действием единичной гармонической силы, приложенной в произвольной точке. Излагается методика определения функции динамической податливости (ФДП) изолированного стержня. Основными элементами матрицы функции динамической податливости стержней будут амплитудные значения полученных перемещений. Расчет колебаний сетчатой оболочки под действием произвольных нагрузок можно свести к построению функции ее динамической податливости. Матрица функции динамической податливости сетчатой цилиндрической оболочки в целом может быть определена в том случае, если известны шесть ее основных элементов, представляющих собой функции динамической податливости от раздельного действия на оболочку единичных усилий нормального, осевого и окружного, а также крутящих и изгибающих моментов. Анализируются особенности функции динамической податливости стержневых элементов каркаса. Все окончательные результаты записаны относительно исходной недеформированной системы координат.

Ключевые слова: оболочка, колебания, частоты, шпангоут, угол, каркас

VIBRATIONS OF COMPOSITE SHELLS OF TETRASTRUCTURE WITH THE ACCOUNT OF DISCRETENESS OF ELEMENTS

¹Nemerebaev M.N., ²Bekmuratov M.M., Aktaev E.K.¹Taraz Innovative-Humanitarian University, Taraz, e-mail: nemerebayev@mail.ru;²M.Kh. Dulati Taraz State University, Taraz

A system of equations describing the determination of the natural frequencies of oscillations of cylindrical reticulated shells is derived using the dynamic compliance function, which is a mathematical analogue of the Green's function. The features of the geometry of reticulated shells of composite materials are considered. At small angles, we can approximately assume that they lie on a surface close to cylindrical. This approach allows us to formulate a unified system of assumptions, on the basis of which an estimation is made of the smallness of certain terms in the relations between deformations and displacements of the rods. The number of rods in the frame and the points of their connection with each other and with the support frame are determined. The equations of forced oscillations of a rod of constant cross section are described, under the action of a unit harmonic force applied at an arbitrary point. The technique for determining the dynamic compliance function of an isolated rod is described. The main elements of the matrix of the dynamic compliance function of the rods will be amplitude values of the obtained displacements. Calculation of the vibrations of the mesh shell under the action of arbitrary loads can be reduced to the construction of its dynamic compliance function. The matrix of the dynamic compliance function of a reticulated cylindrical shell as a whole can be determined if six of its basic elements are known which are functions of dynamic compliance from a separate action on the shell of unitary forces of the normal, axial and circumferential as well as twisting and bending moments. The features of the dynamic compliance function of the rod elements of the framework are analyzed. All final results of relative to the original initial undeformed coordinate systems are written.

Keywords: shell, vibrations, frequencies, bend, corner, frame

Несущей основой тонкостенных оболочек тетрагональной структуры является пространственная симметричная система стержней, соединенных между собой, а также с опорными силовыми элементами в равностоящих точках. Так, каркас цилиндрической оболочки тетраструктуры образуется двумя семействами ребер-стержней постоянного сечения, концы которых скреплены с краевыми шпангоутами таким об-

разом, что точки их соединения между собой и шпангоутом делят его окружность на равные дуги.

При этом семейству ребер, направленных под некоторым углом $+\varphi$ к образующей оболочке, соответствует семейство ребер, направленных к ней под углом $-\varphi$. Дополнительно эти стержни скреплены в равностоящих точках их взаимного пересечения по длине.

В общем случае эти ребра цилиндрического каркаса представляют собой стержни со спиральной осью. Вместе с тем, широкое применение получили конструкции такого типа, оси которых прямолинейны. При малых значениях углов φ можно приближенно считать, что они лежат на поверхности, близкой к цилиндрической.

Особенности геометрии

Расчет колебаний таких систем в предположении линейности их характеристик целесообразно проводить методом функции динамической податливости, понимая под этим термином амплитудное значение перемещений любой произвольно определенной точки А системы под действием единичной гармонической нагрузки, приложенной к ней в произвольной точке В [1].

Колебания элементов системы будем рассматривать в следующих координатных осях. Исходное положение точки оси любого стержня с номером i определяется центральным углом θ_i , который отсчитывают от начального радиуса опорного шпангоута, и координатой S по оси стержня. Перемещения точки x будем определять в направлении его продольной оси 1_i и главных центральных осей 2_i и 3_i , которые в общем случае могут быть повернуты на некоторый угол α_i между осями 3_i , радиусом каркаса и углом γ_i между продольной осью стержня и линией, параллельной оси каркаса. Так, для каркаса, образованного спиральными элементами $\alpha_i = 0$, $\gamma_i = \pm \varphi$. Для каркаса, собранного из прямых стержней без закрутки относительно продольной оси

$$\alpha_i = \alpha_{i0} + \frac{\theta_{il} - \theta_{i0}}{l} x. \quad (1)$$

Угол $\gamma_i = \gamma$ можно определить из соотношения

$$\sin \gamma = \frac{R}{2l} \sin \frac{\theta_{il} - \theta_{i0}}{l} x, \quad \gamma = \arccos \frac{L}{l}, \quad (2)$$

где θ_{i0} – центральный угол, отсчитываемый от начального радиуса нулевого шпангоута до точки его соединения стержнем; θ_{il} – центральная угловая координата i -го стержня на втором (конечном) опорном шпангоуте; R – радиус опорных шпангоутов; l – длина стержней; L – расстояние между опорными шпангоутами.

При малой разности $\theta_i - \theta_0$ можно полагать приближенно, что

$$\gamma = \frac{R}{2l} \frac{\theta_i - \theta_0}{l}.$$

Определим кривизну спирального стержня в виде

$$\kappa = \frac{1 - \cos \varphi^2}{R}. \quad (3)$$

Степень закручивания стержней:

$$\sum_0 = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{R}. \quad (4)$$

При малых φ можно приближенно считать, что

$$\kappa = 0, \quad \sum_0 = \frac{\varphi}{R}. \quad (5)$$

Угол закручивания сечения с координатой x определяется,

$$\alpha = \varphi \frac{x}{R} \quad (6)$$

или

$$\alpha = \frac{\theta_i - \theta_0}{l} x. \quad (7)$$

Пусть каркас состоит из N стержней, направленных к его оси углом φ , и N стержней, направленных под углом $-\varphi$. Точки соединения их друг с другом и опорным шпангоутом, расположенным в начале отсчета продольной координаты, делят окружность шпангоута на равные дуги таким образом, что если стержни, расположенные под углом $+\varphi$, пронумеровать $i = 1, 2, \dots, N$, считая, что i возрастает по часовой стрелке, а стержни, направленные под углом $-\varphi$, против часовой соответственно нумеруются $j = 1, 2, 3, \dots, N$, то i -му стержню соответствует центральный угол $\theta_i = \frac{2\pi}{N} i$.

При этом существует связь $j = N - i + 1$.

Положим, что любой стержень с номером i в каркасе пересекается со стержнями (не принимая в расчет точки соединения с опорными шпангоутами), направленными под углом $-\varphi$. Тогда точки пересечения (связи) делят его длину на равные участки $K + 1$.

Координаты точек пересечения соответственно равны $X_{im} = \frac{l}{K+1} m$, $m = 1, 2, 3, \dots, K$.

При этом точка j соответствует пересечению стержня с номером i со стержнем, имеющим номер $j = N - i - m + 1$. Центральный угол

$\theta_{im} = \frac{2}{N} [i + m]$ и координата этой точки по продольной оси каркаса $\frac{lm}{K+1}$.

Функции динамической податливости изолированного стержня

Вынужденные колебания стержня постоянного сечения в пределах справед-

ливости гипотезы плоских сечений и под действием единичной гармонической силы, приложенной в произвольной точке S по оси x , описываются, как известно, следующими уравнениями [2, 3]:

$$\begin{aligned} EF \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \delta(x-s) \sin \omega t, \\ EI_3 \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= \delta(x-s) \sin \omega t, \\ EI_2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= \delta(x-s) \sin \omega t, \\ GI_p \frac{\partial^4 u_4}{\partial x^4} + \rho I_p \frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} &= \delta(x-s) \sin \omega t, \end{aligned} \quad (8)$$

где E – модуль упругости; G – модуль сдвига; ρ – массовая плотность материала; F – площадь поперечного сечения стержня; I_2, I_3 – моменты инерции сечений стержня относительно оси 2 и 3 соответственно; I_p – полярный момент инерции; u_1, u_2, u_3 – перемещения в направлении оси 1, 2 и 3; u_4 – угол закручивания относительно оси 1; $\delta(x-s)$ – разрывная функция Дирака 1-го рода.

Запишем граничные условия в виде

$$\begin{aligned} u_1 = 0, \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, u_2 = 0, \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, u_3 = 0, \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = 0, u_4 = 0 \text{ при } x = 0, x = l. \end{aligned} \quad (9)$$

Будем искать решение (8) при

$$u_i = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mi} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{m\pi s}{l} \sin \omega t, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a_{m1} &= \frac{1}{\frac{\pi^2 m^2}{l^2} EF - \rho F \omega^2}; \\ a_{m2} &= \frac{1}{\frac{\pi^4 m^4}{l^4} EI_3 - \rho F \omega^2}; \\ a_{m3} &= \frac{1}{\frac{\pi^4 m^4}{l^4} EI_2 - \rho F \omega^2}; \\ a_{m4} &= \frac{1}{\frac{\pi^2 m^2}{l^2} EI_p - \rho I_p \omega^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Основными элементами матрицы функции динамической податливости стержней будут амплитудные значения полученных перемещений, т.е.

$$\begin{aligned} v_{ii}(x, s, \omega^2) &= \sum_{m=1}^{\infty} a_{mi} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{m\pi s}{l}, \quad (12) \\ i &= 1, 2, 3, \dots, k. \end{aligned}$$

Отличными от нуля являются также элементы $v_{55}, v_{66}, v_{35}, v_{53}, v_{62}, v_{26}$. Они определяются через основные, дифференциальными операциями.

$$\begin{aligned} v_{62}(x, s, \omega^2) &= \frac{\partial}{\partial x} v_{22}(x, s, \omega^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{l} a_{m3} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{m\pi s}{l}; \\ v_{26}(x, s, \omega^2) &= \frac{\partial}{\partial s} v_{22}(x, s, \omega^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{l} a_{m3} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{m\pi s}{l}; \\ v_{53}(x, s, \omega^2) &= \frac{\partial}{\partial x} v_{33}(x, s, \omega^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{l} a_{m2} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{m\pi s}{l}; \\ v_{35}(x, s, \omega^2) &= \frac{\partial}{\partial s} v_{33}(x, s, \omega^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{l} a_{m2} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{m\pi s}{l}; \\ v_{55}(x, s, \omega^2) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} v_{33}(x, s, \omega^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 a_{m2} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{m\pi s}{l}; \\ v_{66}(x, s, \omega^2) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} v_{22}(x, s, \omega^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 a_{m3} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{m\pi s}{l}. \end{aligned} \quad (13)$$

Рис. 1. Расчетная схема оболочки: а) оболочка; б) стержневой элемент оболочки

Рис. 2. Расположение стержней на опорном шпангоуте

В целом матрица функции динамической податливости прямого незакрученного стержня постоянного сечения имеет вид

$$\begin{vmatrix} v_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{22} & 0 & 0 & 0 & v_{26} \\ 0 & 0 & v_{33} & 0 & v_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{53} & 0 & v_{55} & 0 \\ 0 & v_{62} & 0 & 0 & 0 & v_{66} \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

Функции динамической податливости стержней по направлениям осей 1, 2 и 3, совпадающих с осью каркаса, его радиусом и осью, расположенной в нормальном сечении под прямым углом к радиусу, обозначен через $\Gamma_{ij}(x, s, \omega^2)$, где для простоты в индексах опущены штрихи.

Элементы матрицы Γ_{ij} выражаются через v_{ij} следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= v_{11} \cos^2 \gamma_1 - \frac{1}{2} v_{22} \sin 2\gamma_1 \cos \alpha_1, \\ \Gamma_{22} &= v_{22} \cos^2 \gamma_1 \cos \alpha_1 - v_{11} \sin^2 \gamma_1, \\ \Gamma_{33} &= v_{33} \cos^2 \alpha_1, \\ \Gamma_{44} &= v_{44} \cos^2 \gamma_1, \\ \Gamma_{55} &= v_{55} \cos^2 \gamma_1 \cos \alpha_1, \\ \Gamma_{66} &= v_{66} \cos^2 \alpha_1, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \frac{1}{2} v_{11} \sin 2\gamma_1 - \frac{1}{2} v_{22} \sin 2\gamma_1 \cos \alpha_1,$$

$$\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = 0, \Gamma_{14} = \Gamma_{41} = 0, \Gamma_{46} = \Gamma_{64} = 0,$$

$$\Gamma_{45} = \Gamma_{54} = \frac{1}{2} v_{11} \sin 2\gamma_1,$$

$$\Gamma_{15} = \Gamma_{51} = v_{26} \sin \gamma_1 \sin \alpha_1,$$

$$\Gamma_{16} = \Gamma_{61} = v_{26} \sin \gamma_1 \cos \alpha_1^2,$$

$$\Gamma_{23} = \Gamma_{32} = v_{22} \cos \gamma_1 \sin \alpha_1,$$

$$\Gamma_{24} = \Gamma_{42} = 0,$$

$$\Gamma_{56} = \Gamma_{65} = -v_{66} \cos \gamma_1 \sin \alpha_1,$$

$$\Gamma_{25} = \Gamma_{52} = -\frac{1}{2} v_{26} \sin 2\alpha_1 \cos \gamma_1,$$

$$\Gamma_{26} = \Gamma_{62} = v_{26} \cos \gamma_1 \cos \alpha_1^2,$$

$$\Gamma_{34} = \Gamma_{43} = v_{35} \sin \gamma_1 \cos \alpha_1^2,$$

$$\Gamma_{36} = \Gamma_{63} = v_{35} \cos \gamma_1 \sin \alpha_1.$$

Функции динамической податливости стержневых элементов каркаса

Перемещения стержней с номерами i , работающих в составе каркаса, складываются из перемещений от действующей на них нагрузки и перемещений от реакции связанных с ним элементов каркаса, направленных под углом $-\phi$ к его оси, которые имеют вид

$$G_{\mu\nu}^i(x, s, \omega^2) = \Gamma_{\mu\nu}^i(x, s, \omega^2) - \sum_{m=1}^k \sum_{r=1}^6 \Gamma_{\mu\nu}^i(x, s_r, \omega^2) R_r^i(S_m), \quad (16)$$

где $R_r^i(S_m)$ – реакция связей в точках S_m , k – число точек связи.

Амплитудные перемещения произвольного j -го элемента каркаса, направленного под углом $-\phi$, равны.

$$G_{\mu\nu}^j(x, s, \omega^2) = \sum_{\tau=1}^k \sum_{q=1}^6 \Gamma_{\mu\nu}^j(x, s, \omega^2) R_q^j(S_\tau). \quad (17)$$

Из условий совместности перемещений элементов каркаса в точках связи получим

$$G_{\mu\nu}^i(x_{i,p}, s, \omega^2) = G_{\mu\nu}^{N-i-p+1}(x_{N-i-p+1}, s, \omega^2) \quad (18)$$

или

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^i(x_{i,p}, s_r, \omega^2) - \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^6 \Gamma_{\mu\nu}^i(x_{i,p}, s_m, \omega^2) R_r^i(S_m) &= r, \\ r &= \sum_{\tau=1}^k \sum_{q=1}^6 \Gamma_{\mu q}^{N-i-p+1}(x_{N-i-p+1}, s_\tau, \omega^2) R_q^{N-i-p+1}(S_\tau), \\ R_\nu^i(S_\tau) &= R_\nu^{N-i-p+1}(S_\tau), \\ R_\mu^i(S_r) &= R_\mu^{N-i-p+1}(S_r). \end{aligned} \quad (19)$$

Раскроем выражение, подставив значения функции динамической податливости элементов каркаса:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}(x_p, s, \omega^2) - \sum_{r=1}^6 \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} a_{n\mu\nu}(\omega) \sin \frac{n\pi x_{ip}}{l} \sin \frac{n\pi S_r}{l} R_r^i(S_m) = \\ = \sum_{q=1}^6 \sum_{\tau=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} a_{n\mu q}(\omega) \sin \frac{n\pi x_q}{l} \sin \frac{n\pi S}{l} R_{\tau}^i(S_{\tau}), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\tau = r, \theta = N - i - p + 1; \Gamma_{\mu\nu}(x_p, s, \omega^2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n\mu}(\omega) \sin \frac{n\pi x_p}{l} \sin \frac{n\pi S_r}{l}.$$

С целью дальнейшего упрощения (20) подставим координаты точек соединения стержней:

$$x_{ip} = \frac{lp}{k+1}, \quad S_{\eta} = \frac{lr}{k+1}, \quad x_{\theta} = \frac{l\theta}{k+1}, \quad S = \frac{l}{k+1}. \quad (21)$$

С учетом (21) функцию динамической податливости i -го стержня можем записать в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^i(x_{i,p}, s_m, \omega^2) - \sum_{\eta=1}^6 \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} a_{n\mu\nu}(\omega) \sin \frac{n\pi p}{k+1} \sin \frac{n\pi r}{k+1} R_r = \\ = \sum_{q=1}^6 \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} a_{\mu q}(\omega) \sin \frac{\tau\pi\theta}{k+1} \sin \frac{\tau\pi r}{k+1} R_r. \end{aligned} \quad (22)$$

Так как синус является периодической функцией, то

$$\begin{aligned} F_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m\mu}(\omega) \sin \frac{\pi n \xi}{k+1} \sin \frac{\pi n r}{k+1} = \sum_{q=1}^{2k+1} \sum_{s=1}^{\infty} a_{q+2(k+1)} \sin \frac{\pi q \xi}{k+1} \sin \frac{\pi q m}{k+1} = \\ = \sum_{q=1}^k \sum_{s=1}^{\infty} a_{q+2(k+1)s} \sin \frac{\pi q \xi}{k+1} \sin \frac{\pi q m}{k+1} + \sum_{l=k+1}^k \sum_{s=1}^{\infty} a_{q+2(k+1)s} \sin \frac{\pi q m}{k+1} \sin \frac{\pi q \xi}{k+1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Пусть $h = 2k + 2l$, тогда

$$F_{mn} = \sum_{q=1}^k \sum_{s=1}^{\infty} a_{q+2(k+1)s} \sin \frac{\pi q \xi}{k+1} \sin \frac{\pi q m}{k+1} + \sum_{\xi=1}^k \sum_{s=1}^{\infty} a_{h+2(k+1)s} \sin \frac{\pi q \xi}{k+1} \sin \frac{\pi q m}{k+1}. \quad (24)$$

Из выражения (23) для a_{mn} следует

$$a_{-h+2(k+1)(s+1)} = a_{h-2(k+1)(s+1)} = a_{h+2(k+1)(s+1)}. \quad (25)$$

Таким образом

$$\begin{aligned} F_{mn} = \sum_{q=1}^k \sum_{s=1}^{\infty} a_{q+2(k+1)s} \sin \frac{\pi q \xi}{k+1} \sin \frac{\pi q m}{k+1} + \sum_{\xi=1}^k \sum_{s=1}^{\infty} a_{h+2(k+1)s} \sin \frac{\pi q \xi}{k+1} \sin \frac{\pi q m}{k+1} = \\ = \sum_{q=1}^k \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{h+2(k+1)s} \sin \frac{\pi q s}{k+1} \sin \frac{\pi q n}{k+1}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_i(x_p, s_m, \omega^2) - \frac{l}{2} \sum_{\eta=1}^6 \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k C_{pq}(\omega) \sin \frac{q\pi\xi}{k+1} \sin \frac{q\pi m}{k+1} R_r = \\ = \frac{l}{2} \sum_{r=1}^6 \sum_{m=1}^k \sum_{\tau=1}^k C_t(\omega) \sin \frac{2\pi\xi}{k+1} \sin \frac{2\pi m}{k+1} R_r, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} C_{pq}(\omega) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{q+2(k+1)s}(\omega), \\ C_t(\omega) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{\eta+2(k+1)s}(\omega). \end{aligned} \quad (28)$$

Теперь умножим левую и правую части нашего уравнения на $\sin \frac{\pi\xi v}{k+1}$ и просуммируем по ξ от 1 до k

$$\begin{aligned} \sum_{\xi}^k \sin \frac{\pi\xi v}{k+1} \Gamma_i(x_p, s_m, \omega^2) &= \frac{l(k+1)}{4} C_{pv}(\omega) \sum_{m=1}^k \sum_{\eta=1}^6 \sin \frac{\pi m v}{k+1} R_r + \\ &+ \frac{l(k+1)}{4} C_{pv}(\omega) \sum_{m=1}^k \sum_{r=1}^6 \sin \frac{\pi m v}{k+1} R_r. \end{aligned} \quad (29)$$

При этом использовались известные соотношения [1]:

$$\begin{aligned} \sum_{\xi}^k \sin \frac{\pi\xi v}{k+1} \sin \frac{\pi\xi q}{k+1} &= \begin{cases} 0 & (q \neq v) \\ \frac{k+1}{2} & (q = v) \end{cases}, \\ \sum_{\xi}^k \sin \frac{\pi\xi r}{k+1} \sin \frac{\pi\xi q}{k+1} &= \begin{cases} 0 & (r \neq q) \\ \frac{k+1}{2} & (q = r) \end{cases}. \end{aligned} \quad (30)$$

Это соотношение, иногда называемое свойством арифметической ортогональности, впервые было получено в работе [4] и использовано для решения задачи о колебаниях регулярных систем:

$$\sum_{m=1}^k \sum_{r=1}^6 \sin \frac{\pi m v}{k+1} R_r = \frac{\sum_{\xi}^k \sin \frac{\pi\xi v}{k+1} \Gamma_i(x_p, s_m, \omega^2)}{\frac{l(k+1)}{4} [C_{pv}(\omega) + C_{rv}(\omega)]}. \quad (31)$$

Вернемся к рассмотрению (16) с учетом (31), при этом выражение для функции динамической податливости стержня, соединенного со стержнем под углом φ_p , приобретает вид

$$G_i(x, s, \omega^2) = \Gamma_{\mu m}^i(x_p, s_m, \omega^2) - \sum_{\xi=1}^k \sum_{m=1}^k a_{\mu m}(\omega) \frac{\sin \frac{\pi\xi v}{k+1} \sin \frac{\pi x_p v}{l}}{\frac{l(k+1)}{4} [C_{pv}(\omega) + C_{rv}(\omega)]}. \quad (32)$$

или, раскрыв выражение $\Gamma^i(x_p, s_m, \omega^2)$ по формуле (16), после некоторых преобразований, получим [5]:

$$G_i(x, s, \omega^2) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m)(\omega) \left[1 - \frac{1}{\frac{k+1}{4} (C_m(\omega) + C_{\xi}(\omega))} \right] \sin \frac{\pi m x_i}{l} \sin \frac{\pi m s_r}{l}. \quad (33)$$

Заключение

Таким образом, будем считать решенной задачу о вынужденных колебаниях свободно опертого i -го стержня, соединенного со стержнями, направленными под углом $-\varphi$ к оси α , так как амплитудные перемещения от произвольной нагрузки при известной ФДП могут быть определены интегральной сверткой $G(x, s, \omega^2)$ от функции нагрузки:

$$y(x) = \int_0^l G(x, s, \omega^2) ds. \quad (34)$$

Список литературы

1. Москаленко Л.В. О выборе параметров подкрепляющих элементов пластин и оболочек, максимально повышающих жесткость системы систем / Л.В. Москаленко,

Б.П. Умушкин // Научный Вестник МГТУ ГА. Серия Эксплуатация ВТ и ремонт АТ. – 2010. – № 161. – С. 111–118.

2. Вульфсон И.И. Краткий курс теории механических колебаний / И.И. Вульфсон. – М.: ВНТР, 2017. – 241 с.

3. Босняков С.М. Определение собственных частот свободных колебаний тонкой цилиндрической оболочки из стеклопластика при несимметричных граничных условиях / С.М. Босняков, В. Чживэй // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2011. – № 1. – С. 110–115.

4. Умушкин Б.П. Оптимизация упругих динамических систем / Б.П. Умушкин // Гражданская авиация на современном этапе развития науки, техники и общества. Тезисы докладов Международной научно-технической конференции, посвященной 85-летию гражданской авиации России. – М.: МГТУ ГА, 2008. – С. 39.

5. Немеребаев М.Н. Динамическая устойчивость сетчатой оболочки из композиционных материалов / М.Н. Немеребаев, Ж.С. Рахманова, А.М. Немеребаева // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2016. – № 8–1. – С. 25–29.